UE Robotique et Contrôle

Cours ICP, Année 2013-2014

Liste d'exercices, corrigé.

I. FONCTION DE TRANSFERT (pag 33 support de cours)

I.1. A quoi cela sert-il une représentation par fonction de transfert?

I.2. Quel est la limitation principale lors de l'utilisation d'une représentation par fonction de transfert pour commander un système?

Corrigé :

I.2. L’importance de la fonction de transfert est dans le fait que Y (s) = H(s)U(s). Par conséquent, nous pouvons prévoir la sortie pour une entrée connue appliquée à un système représenté par une fonction de transfert donnée.

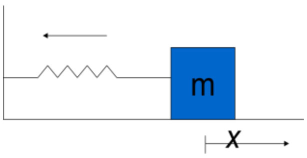
I.2. La fonction de transfert nous indique que pour une entrée déterminée, nous aurons une sortie bien définie. Mais que se passe-t-il à l’intérieur du système ? Pourquoi certains procédés explosent mais les sorties restent toujours convenables ? Ce problème est apparu dans les années 40 et 50 avec les vols à plus grande vitesse et avec les fusées, et a marqué le passage à l’automatique moderne => développement des variables d’état : description interne du système à la place de le considérer comme une boite noire.

II. REPRESENTATION PAR VARIABLES d'ETAT (pag 48 support de cours)

II.1. Ecrire sur forme de représentation par variables d'état les systèmes suivants :

II.1.a)

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \begin{matrix} m = 1kg \\ k = 1N/m \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -x$$



Corrigé : Si l'on définit :

position

vitesse

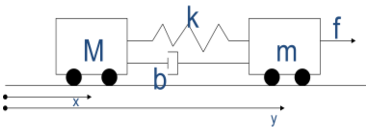
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

nous obtenons :

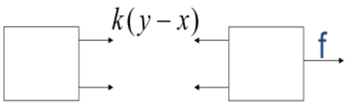
$$\ddot{x} = -x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

II.1. b)



$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= k(y-x) + b(\dot{y}-\dot{x}) \\ m\ddot{y} &= -k(y-x) - b(\dot{y}-\dot{x}) + f \end{aligned}$$



Corrigé : Prenons comme variables d'état la position et la vitesse de chaque chariot :

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= y \\ x_4 &= \dot{y} \end{aligned}$$

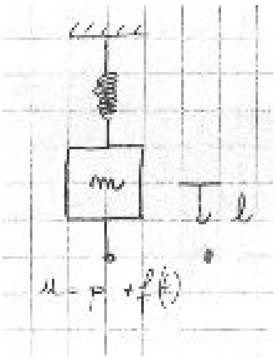
Alors, le système peut être réécris sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}\left[k(x_3 - x_1) + b(x_4 - x_2)\right] \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{m}\left[-k(x_3 - x_1) - b(x_4 - x_2) + f\right] \end{aligned}$$

et, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{b}{M} & \dfrac{k}{M} & \dfrac{b}{M}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{k}{m} & \dfrac{b}{m} & -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}f$$

II.1. c)



$$m\frac{d^2l}{dt^2} = u - kl - b\frac{dl}{dt} \quad b = \text{frottement}$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2l}{dt^2} + b\frac{dl}{dt} + kl = u$$

Corrigé :

Prenons $l \overset{\Delta}{=} x_1$ **tel que** $\dot{x}_1 = \dfrac{dl}{dt} \overset{\Delta}{=} x_2$

Et prenons $y \overset{\Delta}{=} x_2$

Alors,

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{k}{m}l - \frac{b}{m}\frac{dl}{dt} + \frac{1}{m}u$$

$$= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$y = x_2$$

qui peut être écris sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

III. EQUATION D'ETAT, SOLUTION (pag 61, support de cours)

III.1. En utilisant l'opérateur de Laplace, comment calcule-t-on la solution de l'équation d'état suivante?

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Corrigé: La réponse se trouve directement dans les supports de cours, pag 61 :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \therefore \\
sX(s) - X(0) &= AX(s) + BU(s), \text{ Notation simplifiée } X(s) \Rightarrow X \\
sX - AX &= X_0 + BU \\
(sI - A)X &= X_0 + BU \\
X(s) &= (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU \\
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}x(0) + \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}Bu(t)
\end{aligned}$$

En revenant dans le domaine temporelle, la solution de $\dot{x} = Ax + Bu$, pour $t_0 = 0$, est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bud\tau$$

IV. REPRESENTATION PAR VARIABLES d'ETAT ET FONCTION DE TRANSFERT (pag 64, Support de cours)

IV.1. En utilisant l'opérateur de Laplace, trouver la fonction de transfert du système

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Corrigé : Pour trouver la fonction de transfert à partir de la représentation par variable d'état

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

il faut utiliser l'opérateur de Laplace, comme suit :

$$\begin{aligned}
X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \\
Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

V. FORMES CANONIQUES (pag 66, Support de cours)

V.1. Considérons le système $\ddot{y} + a\dot{y} + by = u$

En prenant $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$,

V.1. a) Ecrire le système sous forme commandable

V.1. b) Ecrire la fonction de transfert du système

V.1. c) A quoi cela sert-il la Forme Commandable?

V.1. d) Ecrire la Forme Commandable du système générique:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + b_3 s^{n-3} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n}$$

V.1.e) Ecrire ce même système sous forme observable

Corrigé :

V.1.a) la solution peut être trouvée en page 66 du support de cours :

Si nous prenons :

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -a\dot{y} - by + u = -ax_2 - bx_1 + u \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

V.1. b) Pour écrire la fonction de transfert de $\ddot{y} + a\dot{y} + by = u$, il suffit d'utiliser l'opérateur de Laplace (page 67 du support de cours)

$$\begin{aligned} \ddot{y} &+ a\dot{y} + by = u \\ s^2 Y &+ saY + bY = U \\ \frac{Y}{U} &= \frac{1}{s^2 + sa + b} \end{aligned}$$

ou sinon l'écrire directement à partir de sa forme commandable que l'on vient de calculer :

==> les coefficients du dénominateur de la fc de transfert sont obtenus à partir de la deuxième ligne de la matrice A de la forme commandable (ils sont 'a' et 'b' dans ce cas)

==> et les coefficients du numérateur de la fonction de transfert sont obtenus à partir de la matrice C de la forme commandable (dans cet exemple, c'est '1')

V.1. c). La forme commandable contient deux caractéristiques :

- l'entrée de commande du système 'u' agit sur la dernière équation du système

- et cette dernière équation du système contient l'information sur les pôles du système (puisque les coefficients du polynôme caractéristique apparaissent dans la dernière ligne de la matrice A d'un système sous forme commandable).

Alors, la forme commandable est adaptée pour réaliser un placement de pôles par retour d'état du système.

V.1. d) Ecrire la Forme Commandable du système générique (pag 68 support de cours):

Dans le cas général :

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + b_3 s^{n-3} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n}$$

sera représentée par le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

V.1.e) Ecrire ce même système sous forme observable. La forme observable est :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

VI. TRANSFORMATION DE SIMILARITE, CHANGEMENT DE BASE (pag 71, Support de cours)

VI.1. Considérons le système :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

et le changement de base Qz = x.

VI.1.a) Décrivez le système dans ces nouvelles coordonnées.

VI.1.b) Comment s'appelle-t-elle cette transformation?

VI.1.c)Elle préserve une propriété fondamentale du système. Quelle propriété est-elle?

VI.2. Un système d'équations d'état peut être mis par une transformation de similarité sous la forme de Jordan.

VI.2.a) Dans le cas de pôles distinctes, quel est la forme de la matrice A de la forme de Jordan?

VI.2.b) Et comment calcule-t-on la matrice Q de changement de coordonnées?

VI.2 .c) Quelle est l'avantage de cette représentation?

Corrigé : pag 71 du support de cours

VI.1.a)

Pour un système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

nous pouvons définir une autre variable :

$$\begin{aligned} Qz &= x \Rightarrow Q\dot{z} = \dot{x} \therefore Q\dot{z} = A\underbrace{Qz}_{x} + Bu \\ \dot{z} &= Q^{-1}AQz + Bu \\ y &= C\underbrace{Qz}_{x} + Du \end{aligned}$$

et donc le système est maintenant décrit dans ce nouveau vecteur de variables d'état.

VI.2.b) C'est une transformation de similarité.

VI.2.c) Elle préserve les pôles du système qui restent inchangés par une transformation de similarité.

VI.2.a) Il s'agit d'une matrice diagonale où les éléments de la diagonale sont les pôles du système.

VI.2.b) La matrice Q dans le cas de pôles distinctes est obtenue par une matrice où ses colonnes sont les vecteurs propres de la matrice A.

VI.2 .c) Les pôles de la matrice A sont visibles directement et le système est découplé.

VII. REALISATION (pag 74, Support de cours)

VII.1) Considérons le système suivant :

$$G(s) = \frac{4s^3 + 25s^2 + 45s + 34}{2s^3 + 12s^2 + 20s + 16}$$

VII.1.a) Simplifiez G(s) pour satisfaire à deux conditions :

- le terme de plus haut degré du dénominateur multiplié par 1.
- le degré du numérateur inférieur à celui du dénominateur.

VII.1.b) Ecrivez deux réalisations pour ce système (formes commandable et observable)

Corrigé:

VII.1.a) Pour une fonction de transfert, nous devons la simplifier pour avoir le terme de plus haut degré du dénominateur multiplié par 1 :

$$G(s) = \frac{4s^3 + 25s^2 + 45s + 34}{2s^3 + 12s^2 + 20s + 16} \Rightarrow \frac{2s^3 + 12.5s^2 + 22.5s + 17}{s^3 + 6s^2 + 10s + 8}$$

Pour que le dégrée du numérateur soit strictement plus petit que celui du dénominateur, nous réalisons une division Euclidienne :

$$\begin{array}{l|l} 2s^3 + 12.5s^2 + 22.5s + 17 & s^3 + 6s^2 + 10s + 8 \\ \underline{-2s^3 - 12s^2 - 20s - 16} & \overline{2} \\ 0.5s^2 + 2.5s + 1 & \end{array}$$

Et la fonction de transfert peut être réécrite comme :

$$G(s) = \frac{0.5s^2 + 2.5s + 1}{s^3 + 6s^2 + 10s + 8} + 2$$

VII.1.b) La forme commandable est

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -10 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 0.5 \end{bmatrix} x + 2u \end{aligned}$$

et la forme observable :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + 2u \end{aligned}$$

VIII. Systèmes SISO et MIMO et Schéma Bloc (pag 82, Support de cours)

VIII.1. Qu'est-ce qu'un système SISO? et un système MIMO?

VIII.2. Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

VIII.2. a) Ecrivez un schéma bloc pour ce système.

VIII.2. b) Est-ce le système ci-dessus SISO ou MIMO?

VIII.3. Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

VIII.3. a) Ecrivez un schéma bloc pour ce système.

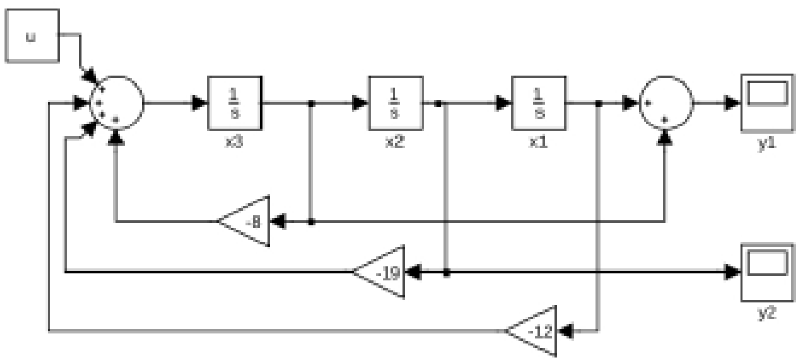
VIII.3. b) Est-ce le système ci-dessus SISO ou MIMO?

Corrigé : (pag 82, support de cours)

VIII.1. Un système est dit SISO - Single Input Single Output (Entrée Unique Sortie Unique) s'il possède une entrée unique et une sortie unique.

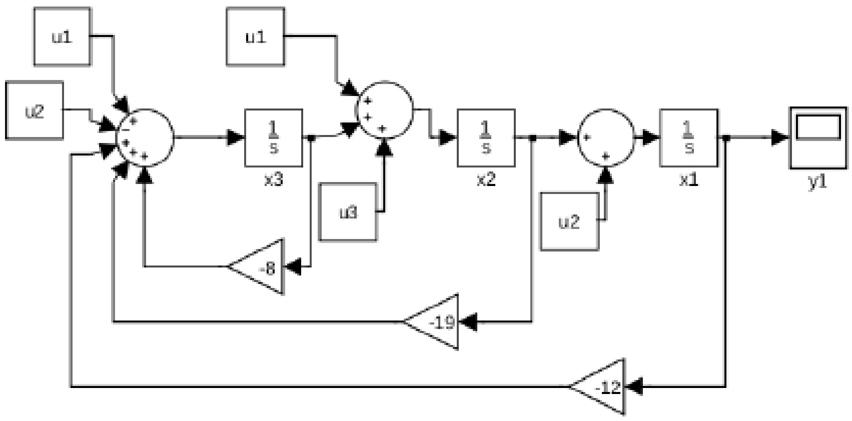
Un système est dit MIMO - Multiple Input Multiple Output (Entrées Multiples Sorties Multiples) s'il possède diverses entrées et/ou diverses sorties.

VIII.2.a) Le schéma bloc est :



VIII.2.b) Le système est MIMO car il possède 2 sorties.

VIII.3. a) Le schéma bloc est :



VIII.3.b) Le système est MIMO car il possède plusieurs (3) entrées.

IX. BIBO STABILITE et EFFET DES ZEROS (pag 98, Support de cours)

IX. 1. Enoncez la condition (nécessaire et suffisante) pour que un système SLIT soit BIBO stable

IX.2. Indiquez l'effet de la position des zéros

Corrigé :

Rappel :
- un système est dit BIBO (EBSB) stable ssi toute et n'importe quelle entrée bornée, produit une sortie aussi bornée.

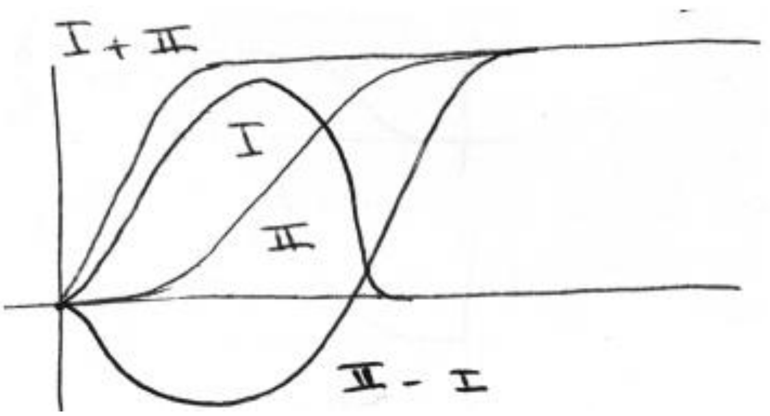
IX.1. Un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) relaxé (ses conditions initiales sont égales à zéro), est BIBO stable ssi tous les pôles de sa fonction de transfert ont leur partie réelle négative.

IX.2. Effet des zeros :

Prenons une fonction de transfert du deuxième ordre avec un zéro :

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{s-(-z)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \\ &= \underbrace{\frac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}_{I} + \underbrace{\frac{b}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}_{II} \end{aligned}$$

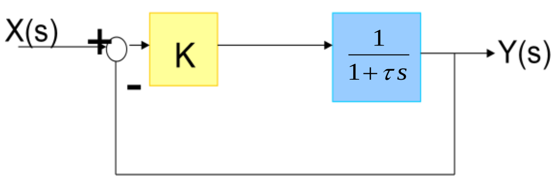
Si les zéros sont à part réelle négative, le terme I sera additionné au terme II, et le résultat est amélioré : la réponse a un temps de montée plus rapide. Par contre, si les zéros sont à partie réelle positive, le terme I sera soustrait du terme II et le système sera plus lent, avec un phénomène oscillatoire initial. De plus, le système irai dans un premier temps dans la "mauvaise direction". Ces systèmes sont appelés à phase non minimale.



X. LIEU DES POLES ou LIEU DES RACINES ou ROOT LOCUS (pag 112, Support de cours)

X. 1. A quoi cela sert-il le lieu des pôles?

X.2. Donner le lieu des pôles du système du premier ordre suivant commandé par un gain de rebouclage:



Corrigé :

X.1.

Le Root Locus est une technique pour déterminer le changement de position des pôles d'un système en fonction d'un gain de rebouclage, sans toutefois résoudre explicitement les équations pour le faire.

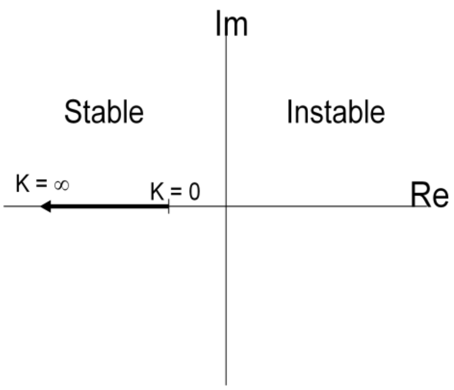
X.2. La fonction de transfert en boucle fermée est

$$\boxed{\frac{Y}{X} = \frac{k}{1 + k + \tau s}}$$

Le pôle en boucle fermée dépend du gain k :

$$\boxed{p_1 = -\frac{1 + k}{\tau}}$$

Lieu des pôles → montre l'évolution du pôle quand le gain K augmente



Conclusion : pour tout gain K, les pôles de ce système commandé par un gain de rébouclage sont réels et strictement négatifs. Alors, pour tout gain K, le système est BIBO stable. Le choix du gain K permet de régler la rapidité du système.

XI. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE (pag 121, Support de cours)

XI.1.

XI.1. a) Quelle est la condition de commandabilité d'un système linéaire?

XI.1.b) A quoi cela sert-il de vérifier cette condition?

XI.1.c) Si la condition de commandabilité n'est pas vérifiée, indiquez comment calculer le nombre d'états commandables et le nombre d'état non commandables.

XI.2.

XI.2. a) Quelle est la condition d'observabilité d'un système linéaire?

XI.2. b) A quoi cela sert-il de vérifier cette condition?

XI.2. c) Si la condition d'observabilité n'est pas vérifiée, indiquez comment calculer le nombre d'états observables et le nombre d'état non observables.

XI.3. Vérifiez l'observabilité et la commandabilité du système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

XI.4. Sans faire de calculs, est-ce le système ci-dessous commandable?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Corrigé :

XI.1.a) Quelle est la condition de commandabilité d'un système linéaire?

Un système est commandable ssi :

$$rang(\Omega) \triangleq rang([B|AB|\cdots A^{n-1}B]) = n$$

Si

$$rang\Omega = m < n \quad \therefore \exists T \quad tq\bar{x} = Tx = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{où } dim(\bar{x}_1) = m$$

XI.1.b) A quoi cela sert-il de vérifier cette condition? Pour répondre, revenons à la définition de commandabilité d'un système:

Un système est dit commandable à l'instant t_0, si $\exists\ t_1 > t_0$ fini tel que $\forall\ x_0 = x(t_0)$ et $\forall\ x_1$, $\exists\ u_{[t_0,t_1]}$ capable de transférer le système de l'état initial x_0 à l'état x_1 à l'instant t_1. Dans le cas contraire, le système est dit non-commandable.

Si le système est commandable, il est possible de trouver une loi de commande u pour transférer l'état initial du système à un point arbitraire dans l'espace d'états.

XI.1.c) Si la condition de commandabilité n'est pas vérifiée :

- le nombre d'états commandables est égal au rang de la matrice de commandabilité

- et le nombre d'état non commandables est égal à n - rang de la matrice de commandabilité.

XI.2.a) Quelle est la condition d'observabilité d'un système linéaire?

Un système est observable ssi :

$$rang(\mathcal{O}) \triangleq rang\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

XI.2.b) A quoi cela sert-il de vérifier cette condition?

L'observabilité est, pour la sortie, l'équivalent de la commandabilité pour l'entrée. Si un système est commandable, il est possible d'exciter tous ses états par l'entrée. De la même façon, si un système est observable, tous ses modes pourront être observés à la sortie.

En d'autres mots, il est possible de construire un observateur :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + Ly - L\hat{y} \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

pour estimer l'état du système à partir de la mesure de ses sorties, où le vecteur de gains L peut être calculé par la formule de Ackerman pour les observateurs.

$$L = \Delta^*(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A noter que l'inverse de la matrice d'observabilité apparait dans la formule de L qui ne peut donc être calculé que si le système est observable (cad si la matrice de observabilité est de rang plein et donc inversible).
Si la condition d'observabilité n'est pas vérifiée, indiquez comment calculer le nombre d'états observables et le nombre d'état non observables.

XI.2.c) Le nombre d'états observables est égal au rang de la matrice de observabilité et le nombre d'état non observables est égal à n - rang de la matrice de observabilité.

XI.3. Vérifiez l'observabilité et la commandabilité du système suivant :

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
\end{aligned}
$$

XI.4. Sans faire de calculs, est-ce le système ci-dessous commandable?

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x
\end{aligned}
$$

En regardant le système, la dynamique de x_3 est donnée par :

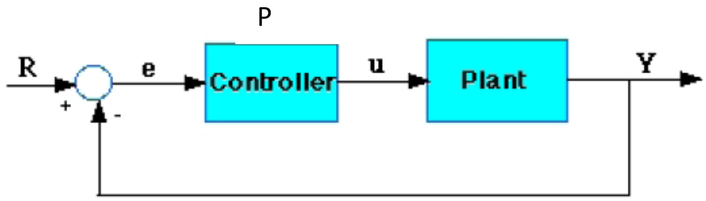
$$\dot{x}_3 = x_3$$

Cela implique que la dynamique de x_3 est complètement indépendante du reste du système. Il n'est donc pas possible d'agir et de changer cette dynamique par action sur l'entrée u.

Le système n'est donc pas commandable. Il a au moins un état non commandable qui est x_3. De plus, la dynamique de x_3 est instable! Et alors, pour toute entrée u, le système sera toujours instable car il y aura toujours un état instable qui ne pourra pas être stabilisé.

XII. CORRECTEUR PID (pag 145, Support de cours)

Considérez le système ci-dessous commandé par un correcteur du type proportionnel suivant:



XII.1.Indiquez une méthode pour régler le gain Kd d'un correcteur du type P

XII.2. Quelle est la fonction principale d'introduire le terme intégrateur? Quelles désavantages?

XII.3. Et du terme dérivateur?

Corrigé:

XII.1 Le lieu de racines, ou lieu des poles.

XII.2. le terme intégrateur élimine l'erreur en régime permanent. Le système devient plus lent.

XII.3. le terme dérivateur (prédictif) a un effet stabilisateur. Il diminue les oscillations, le dépassement et le temps d'établissement.

XIII. RETOUR d'ETAT (pag 161, support de cours)

Considérez le système suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

La formule de Ackerman, donnée par :

$$L = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega^{-1} \Delta^*(A)$$

permet le calcul d'un vecteur de retour d'état L qui place les pôles du système aux racines du polynôme

$$\Delta^*(s) = (s - p_1)(s - p_2).....(s - p_n)$$

XIII.1. Pour le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Trouvez par la formule de Ackerman un vecteur de retour d'état qui positionne les pôles tous à -1.

Corrigé:

Le vecteur de retour d'états L peut être calculé par la formule de Ackerman:

$$L = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega^{-1} \Delta^*(A)$$

Pour cela, il faut calculer la matrice de commandabilité Ω= [B AB ...... A^{n-1}B], et puis son inverse.

Et il faut également calculer Δ*(s) qui est le polynome caractéristique correspondant aux pôles que l'on souhaite pour le système :

$$\Delta^*(s) = (s - p_1)(s - p_2).....(s - p_n)$$

1) La matrice de commandabilité Ω est

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et son inverse est :

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique des pôles que l'on souhaite placer au système (3 pôles en -1) est :

$$\Delta^*(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Et donc, en remplacant s par A et 1 par la matrice identité (polynome en A), nous avons :

$$\Delta^*(A) = (A + I)^3 = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Et nous pouvons donc calculer le vecteur de retour d'état :

$$\begin{aligned} L &= -[0\,0\,1]\Omega^{-1}\Delta^*(A) \\ &= -[0\,0\,1]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & -4 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cela signifie que en applicant la loi de commande par retour d'état :

u= Lx dans le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

on obtiendra alors en boucle fermée, un système dont les 3 pôles sont à -1.

XIV. FORMULE DE ACKERMAN POUR LES OBSERVATEURS (pag 189, support de cours)

La formule de Ackerman pour les observateurs est donnée par :

$$L = \Delta^*(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

XIV. 1. Considérez le satellite:

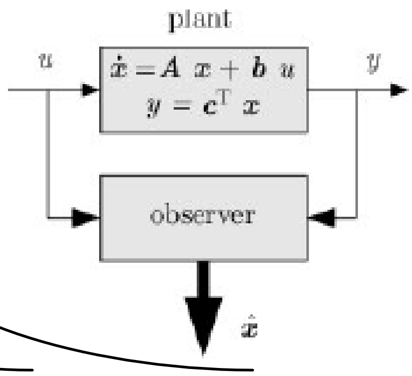
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \qquad \therefore \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

On souhaite l'observer avec une constante de temps $tau = 0.1$s. Cela implique à placer les pôles de l'observateur (ils sont deux) à -10. Présenter l’observateur nécessaire.

Corrigé:

La formule de Ackerman pour les observateurs permet de calculer le vecteur de retour d'état L à utiliser dans l'observateur :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + Ly - L\hat{y} \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$



L'observateur ainsi conçu assurera que à partir des mesures de l'entrée u e t des sorties y, l'état estimé $\hat{x}$ convergera vers le vrai état x

De plus, la vitesse de convergence sera donnée par les pôles du polynôme caractéristique Δ*(s), que l'on peut choisir et introduire dans la formule de Ackerman pour les observateurs.

Calcule de L :

On souhaite l'observer avec une constante de temps de τ = 0.1s
⇒ **des pôles (ils sont deux) à -10.**

Par conséquent :

$$\Delta^*(s) = (s+10)^2 = s^2 + 20s + 100$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Delta^*(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Et la matrice d'observabilité :

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et finalement :

$$L = \Delta^*(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Et par conséquent l'observateur sera :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix} (y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}$$

RAPPEL : Expansion en fractions partielles (pag 92)

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad \therefore$$

$$H(s) = \frac{K_1}{(s-p_1)} + \frac{K_2}{(s-p_2)} + \dots + \frac{K_n}{(s-p_n)}$$

$$K_i = H(s)(s-p_i)|_{s=p_i}$$

Exemple 1 : pôles réels

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= H(s)(s+1)|_{s=-1} \\ &= 2\frac{(s+2)}{(s+3)}\bigg|_{s=-1} = 1 \\ K_2 &= 2\frac{(s+2)}{(s+1)}\bigg|_{s=-3} = 1 \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+3)}$$

Exemple 2 : pôles complexes conjugués

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s(s+i)(s-i)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+i)} + \frac{K_3}{(s-i)}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{(s^2+1)}\bigg|_{s=0} = 1 \\ K_2 &= \frac{1}{s(s-i)}\bigg|_{s=-i} = -\frac{1}{2} \\ K_3 &= \frac{1}{s(s+i)}\bigg|_{s=i} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+i} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-i} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$